

Utorak, 23. srpnja, 2013.

**Zadatak 1.** Dokaži da za svaka dva prirodna broja  $k$  i  $n$  postoji  $k$  prirodnih brojeva  $m_1, m_2, \dots, m_k$  (ne nužno različitih) takvih da je

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

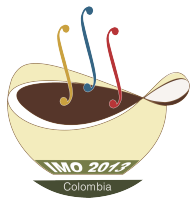
**Zadatak 2.** Konfiguraciju od 4027 točaka u ravnini zovemo *kolumbijskom* ako se sastoji od 2013 crvenih i 2014 plavih točaka, pri čemu nikoje tri točke iz konfiguracije nisu kolinearne. Povlačenjem pravaca ravnina se dijeli na nekoliko dijelova. Kažemo da je raspored pravaca *dobar* za kolumbijsku konfiguraciju ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

- nijedan od pravaca ne prolazi nijednom točkom konfiguracije;
- nijedan od dijelova ne sadrži točke obje boje.

Nađi najmanji broj  $k$  takav da za svaku kolumbijsku konfiguraciju od 4027 točaka postoji dobar raspored  $k$  pravaca.

**Zadatak 3.** Pripisana kružnica trokuta  $ABC$  nasuprot vrhu  $A$  dodiruje stranicu  $\overline{BC}$  u točki  $A_1$ . Analogno se definiraju točke  $B_1$  na  $\overline{CA}$  i  $C_1$  na  $\overline{AB}$ , kao dodirne točke pripisanih kružnica nasuprot vrhovima  $B$  i  $C$ , redom. Pretpostavimo da središte kružnice opisane trokutu  $A_1B_1C_1$  leži na kružnici opisanoj trokutu  $ABC$ . Dokaži da je trokut  $ABC$  pravokutan.

(*Pripisana kružnica trokuta  $ABC$  nasuprot vrhu  $A$  je kružnica koja dodiruje stranicu  $\overline{BC}$ , produžetak stranice  $\overline{AB}$  preko točke  $B$  i produžetak stranice  $\overline{AC}$  preko točke  $C$ . Slično se definiraju pripisane kružnice nasuprot vrhovima  $B$  i  $C$ .)*)



Srijeda, 24. srpnja, 2013.

**Zadatak 4.** Neka je  $H$  ortocentar šiljastokutnog trokuta  $ABC$ , a  $W$  točka na stranici  $\overline{BC}$ , različita od točaka  $B$  i  $C$ . Točke  $M$  i  $N$  su redom nožišta visina iz vrhova  $B$  i  $C$ . Neka je  $\omega_1$  kružnica opisana trokutu  $BWN$ , a  $X$  točka na  $\omega_1$  takva da je  $\overline{WX}$  promjer kružnice  $\omega_1$ . Analogno, neka je  $\omega_2$  kružnica opisana trokutu  $CWM$ , a  $Y$  točka na  $\omega_2$  takva da je  $\overline{WY}$  promjer kružnice  $\omega_2$ . Dokaži da su točke  $X$ ,  $Y$  i  $H$  kolinearne.

**Zadatak 5.** Neka je  $\mathbb{Q}_{>0}$  skup svih pozitivnih racionalnih brojeva. Neka funkcija  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  zadovoljava sljedeća tri uvjeta:

- (i) za sve  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  vrijedi  $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ;
- (ii) za sve  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  vrijedi  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ;
- (iii) postoji racionalni broj  $a > 1$  takav da je  $f(a) = a$ .

Dokaži da je  $f(x) = x$  za sve  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ .

**Zadatak 6.** Neka je  $n \geq 3$  prirodni broj. Na kružnici je dano  $n + 1$  točaka koje je dijele na lukove jednake duljine. Promatrajmo sva moguća označavanja tih točaka brojevima  $0, 1, \dots, n$  u kojima se svaka oznaka koristi točno jednom; dva takva označavanja smatraju se istima ako se jedno može dobiti od drugog rotacijom dane kružnice. Označavanje zovemo *lijepim* ako za svake četiri oznake  $a < b < c < d$  za koje je  $a + d = b + c$  tetiva koja spaja točke označene s  $a$  i  $d$  ne siječe tetivu koja spaja točke označene s  $b$  i  $c$ .

Neka je  $M$  broj lijepih označavanja, a  $N$  broj uređenih parova  $(x, y)$  prirodnih brojeva za koje je  $x + y \leq n$  i  $M(x, y) = 1$ . Dokaži da je

$$M = N + 1.$$